11 – апта.

Сандық қатарлар

Мысал №1. Қатардың қосындысын тап $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Алынған формуланы қолданып, қатардың n-ші бөлік қосындысын табайық :

$$S_n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Ендеше, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S = \frac{11}{18}$.

Мысал №2. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,\quad a \neq 0$ түріндегі қатарды (геометриялық прогрессия) қарастырайық. Онда бөлік қосынды:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

1) Егер $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$

2) Егер $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty \Rightarrow \dfrac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

3) Егер $|q| = 1$, онда

а) $q = 1 \Rightarrow a + a + ... + a + ... \Rightarrow S_n = n \cdot a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \infty \quad (a > 0$ болса)

б) $q = -1 \Rightarrow a - a + a - a + ... \Rightarrow S_n = 0$, егер n-жұп болса және $S_n = a$, егер n-тақ болса,
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

Сонымен, қатар $|q| < 1$ болғанда ғана жинақты.

Салыстыру белгілері:

1.Егер қандай да бір N нөмірінен бастап, $a_n \le b_n$, $n = N, N+1,...$ теңсіздігі орынды болса, онда

а) (3) қатарының жинақтылығынан (2) қатарының жинақты екені шығады,

б) (2) қатарының жинақсыздығынан (3) қатарының жинақсыз екені шығады.

2. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne 0$ ақырлы шегі табылса, онда (1) және (2) қатарлары не екеуі де бірдей жинақты, не екеуі де бірдей жинақсыз.

Мысал №3. Қатарды жинақтылыққа зертте:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots \qquad (4)$$

Жинақты (мысал 1, $q = \frac{1}{2}, a = 1$) болатын

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

қатарын қарастыралық, $n \ge 2$ үшін: $\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}$ болғандықтан, $\frac{1}{2^2} \le \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}, \ldots$ ендеше (4) қатары жинақты.

Даламбер белгісі (Коши). Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l -ақырлы сан болса, онда:

а) егер $l<1$ болса, онда (1) қатары жинақты,
б) егер $l>1$ болса, (1) қатары жинақсыз,
в) $l=1$ қатардың жинақтылығы туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 4. Қатарды жинақтылыққа зертте:

а) $\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(\dfrac{7}{11}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n+\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^\infty=0$, яғни, жинақтылықтың қажетті шарты орындалады. Коши белгісін қолданамыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$ - қатар жинақты.

б) гармониялық қатар үшін:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Жинақтылықтың қажетті шарты : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ орындалады. Даламбер белгісін қолданамыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ -жинақтылық туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал №5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$.

Шешуі. $a_n=\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$ болады. Коши белгісін қолдансақ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{\frac{3n+4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}}{5+\frac{2}{n}}\right)^{3+\frac{4}{n}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{3}<1.$$

Яғни, берілген қатар жинақты.

Кошидің интегралдық белгісі. Қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N\ge a_{N+1}\ge a_{N+2}\ge\ldots$ теңсіздігі орындалсын және $f(x)$ функциясы мынадай үзіліссіз өспелі емес функция болсын: $f(N)=a_N$, $f(N+1)=a_{N+1},\ldots$. Онда, егер $\int_N^{\infty}f(x)dx$ жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары жинақты (жинақсыз).

Мысал №6. Берілген қатарды жинақтылыққа зертте:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots, \qquad p>0-const\,. \tag{5}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ - қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

$\frac{1}{1^p}>\frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>\ldots$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $N=1$ деп алып, Кошидің интегралдық белгісін қолдансақ;

а) $p=1$ болса, онда $I=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim\limits_{N\to\infty} ln\,x\Big|_1^N=\lim\limits_{N\to\infty}\left(ln\,N-ln1\right)=\infty$, яғни, интеграл жинақсыз. б)

$$I=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^N=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{N\to\infty}\left(N^{1-p}-1\right).$$

Бұл интеграл $p>1$ болғанда жинақты, ал $p<1$ жинақсыз.

Ендеше, (5) қатары $p>1$ болғанда ғана жинақты, ал қалған жағдайларда жинақсыз.

Егер p=1 болса, (5) қатары біз жоғарыда 5-мысалда қарастырған гармониялық қатар болады және ол жинақсыз. Ал $p\neq 1$ болса, онда (5) Дирихле қатары деп аталады.

Мысал №7. Қатарды жинақтылыққа зертте: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

Шешуі. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстыралық, бұл қатар көрсеткіші $p=\frac{1}{2}<1$ болатын Дирихле қатары және ол жинақсыз. $a_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}>\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$. Ендеше, салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.